Anotações de Inferência Bayesiana

Aulas de Luis G. Esteves & Victor Fossaluza, digitadas por Gustavo S. Garone

2025-08-15

Índice

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 Inferência Bayesiana

Parte I

Inferência Bayesiana

2 O Pensamento Bayesiano

2.1 Inferência

Podemos dizer que inferência é qualquer processo racional de redução de **incerteza**. Se não há incerteza, não há necessidade da estatística.

Exemplo 2.1 (Bolas na caixa)**.** Considere uma caixa com 5 bolas, algumas verdes (v), e o restante brancas (b). Suponha que amostramos duas bolas, sem reposição. Isto é, retiramos duas bolas desta caixa, e que ambas as bolas retiradas foram verdes. A partir deste experimento, podemos *inferir* que $v \geq 2$, ou seja, ao menos duas bolas da caixa são verdes. Caso retirássemos uma branca e uma verde, poderíamos naturalmente inferir que ao menos uma bola da caixa é branca, e ao menos uma é verde.

Note que, mesmo após esse processo, a incerteza sobre a composição da caixa contínua. Contudo, com a nova informação, ocorre uma *atualização da incerteza*.

A inferência estatística é, portanto, o processo de redução de incertezas a partir de dados e métodos estatísticos. Neste contexto, a *Inferência Bayesiana* é a inferência estatística baseada na perspectiva *subjetiva* de probabilidade.

Probabilidade

O objeto probabilidade pode ser estudada de diversas perspectivas. Estamos acostumados com o *cálculo de probabilidade*, em que desenvolvemos teoremas e outros resultados a partir dos axiomas de Kolmogorov.

$$
\begin{aligned}
P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F} \\
P(\Omega) = 1 \\
P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n
\end{aligned}
$$

Por outro lado, há pessoas que se ocupam em entender a probabilidade do ponto de vista da *Teoria da Medida*, preocupando-se em estudar a probabilidade como uma função de medida.
Ainda assim, existe uma visão mais "filosófica" do estudo da probabilidade, que se preocupa na *interpretação* da probabilidade. Uma interpretação clássica é da probabilidade como medida de frequência, enquanto a interpretação subjetiva da probabilidade, utilizada na inferência Bayesiana, toma a probabilidade como uma medida de *incerteza*.
Por exemplo, num lançamento de moedas, a teoria frequentista afirma que, ao lançar uma moeda honesta um número grande de vezes, esperaria que 50% dos lançamentos resultasse em cara. Por outro lado, na teoria subjetiva da probabilidade, alguém que acredita que a moeda é honesta diria, antes do primeiro lançamento desta, que não há razão de acreditar que a

moeda vá provavelmente cair cara, tão quanto acreditar que mais provavelmente cairá coroa. Nesta visão, a probabilidade é um número que *mede, quantifica ou representa a incerteza* do observador sobre um fenômeno.
Esta discussão sobre o significado de probabilidade é denominado *Teoria da Probabilidade.*

2.1.1 Cenários de Incerteza

Além do exemplo da caixa com bolas que discutimos anteriormente, podemos pensar em outros cenários de incerteza:

Exemplo 2.2 (Erupções na pele)**.** Considere um indivíduo com erupções na pele. Este tipo de erupções pode ser causado por doenças diversas, dentre elas, uma é considerada grave, provocando incerteza no indivíduo sobre sua saúde. Sabendo disto, o indivíduo vai ao hospital em busca de informações sobre sua condição. A partir de experimentos, como exames médicos, a incerteza do indivíduo sobre a doença e sua saúde é reduzida pelas informações obtidas.

Exemplo 2.3 (Avião perdido)**.** Em outro exemplo, considere que um avião caiu num corpo d'água e sua localização exata é desconhecida. Conforme descobrimos informações do avião, como partes encontradas no mar, consideração de oceanográficos e climáticos, análise técnica do modelo do avião, resultados de buscas passadas e outras informações, podemos gradativamente reduzir a região de queda do avião, até encontrarmos o ponto exato ou muito próximo desta queda.

Este exemplo é mais real do que pensa! Técnicas bayesianas foram utilizadas na busca pelo infame voo 447

Num último exemplo, suponha que estamos interessados em estudar a eficácia de um medicamento na redução da taxa do colesterol. A incerteza jaz exatamente na eficácia do medicamento, isto é, quanto a taxa de colesterol é reduziada após uso do medicamento. Para esta análise, coletaríamos amostras aleatórias simples. Suponha, por hipótese, que o colesterol dos pacientes em estudo amostrados ($X_n = (X_1, \dots, X_n)$ seguem uma distribuição Normal, com variância 16 e média desconhecida que queremos inferir:

$$X \sim (?, 16)$$

No modelo clássico, usaríamos de métodos como o uso do estimador não viesado de variância uniformemente mínima. Por outro lado, o bayesiano começaria com uma incerteza antes da coleta da amostra e, com a informação obtida, atualizaria sua incerteza em uma nova distribuição:

$$\mathcal{D} \xrightarrow{X_n} \mathcal{D}|x_1, \dots, x_n$$

Esta ferramenta de atualização de informação é o cerne da abordagem Bayesiana, e será extensivamente estudada pelo curso.

3 Teorema de Bayes

Da probabilidade, conhecemos o enunciado do Teorema de Bayes.

Teorema 3.1 (Teorema de Bayes)**.** *Sejam* $A_1, A_2, ...A_n \in \mathcal{A}$ *eventos que particionam* Ω*, isto é,* $A_i \cap A_j = \emptyset, \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$*, e* $D \in \mathcal{A}$ *um evento tal que* $P(D) > 0$*. Então, para* $i = 1, 2, \ldots, n$*,*

$$P(A_i|D) = \frac{P(D|A_i)P(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(D|A_j)P(A_j)}$$

Detalhes importantes

Note que $P(X = x|\theta = \theta_i)$ é a *função de verossimilhança.* Note também que o denominador, $\sum\limits_{j=1}^{n} P(D|A_j)P(A_j)$, ***não*** depende de i!!!

Note que, para o Exemplo 2.1,

$$\begin{aligned}
E(\theta) &= \frac{5}{2} \\
E(\theta|X_1 = 1, X_2 = 0) &= 1 \cdot \frac{2}{10} + 2 \cdot 310 + 3 \cdot \frac{3}{10} + 4 \cdot \frac{2}{10} = \frac{5}{2} \\
\mathrm{Var}(\theta|X_1 = 1, X_2 = 0) &= E(\theta^2|X_1 = 1, X_2 = 0) - E(\theta|X_1 = 1, X_2 = 0)^2 \\
&= 1^2 \cdot \frac{2}{10} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} + 3^2 \cdot \frac{3}{10} + 4^2 \cdot \frac{2}{10} - \frac{25}{4} = \frac{21}{20}
\end{aligned}$$

Exercício 3.1. Refaça o exercício (encontre a distribuição a posteriori de θ) dado a amostra $X_1 = 1, X_2 = 1$

Solução 3.1. Pelo Teorema 3.1,

$$\frac{\frac{i}{5} \cdot \frac{i-1}{4} \cdot \frac{1}{6}}{\sum\limits_{j=0}^{5} \frac{j}{5} \cdot \frac{j-1}{4} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{i(i-1)}{\sum\limits_{j=0}^{5} j(j-1)} = \frac{i(i-1)}{40}$$

Um outro caminho para resolução envolve o uso de proporcionalidade. Podemos observar que, pelo Teorema 3.1,

$$\begin{aligned}P(\theta = i|X = (1,1)) \propto P(X = (1,1)|\theta = i)P(\theta = i) = \frac{i}{5} \cdot \frac{i-1}{4} \cdot \frac{1}{6}\mathbb{1}_\Theta(i) \\ = \frac{i(i-1)}{120}\mathbb{1}_\Theta(i) \propto i(i-1)\mathbb{1}_\Theta(i)\end{aligned}$$

ou seja, podemos simplesmente nos preocupar com o numerador e dividir ("normalizar") pela soma dos termos:

Exemplo 3.1 (Informação sobre a soma)**.** Ainda no cenário do Exemplo 2.1, considere a função $T(X) = X_1 + X_2$ do número de bolas verdes na amostra. Você é informado que $T(X_=1$. Vamos determinar a distribuição a posteriori de θ dado que $X_1 + X_2 = 1$.

$$P(\theta = i|X_1 + X_2 = 1) = \frac{P(X_1 + X_2 = 1|\theta = i)P(\theta = i)}{\sum_{j=0}^{5} P(X_1 + X_2 = 1|\theta = j)P(\theta = j)}$$

usando da proporcionalidade,

$$\begin{aligned}P(\theta = i|X_1 + X_2 = 1) &\propto P(X_1 + X_2|\theta = i)P(\theta = i) \\ &= \sum_{(x_1,x_2)\in\mathfrak{X}:x_1+x_2=1} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2|\theta = i)P(\theta = i) \\ &= [P(X_1 = 1, X_2 = 0|\theta = i) + P(X_1 = 0, X_2 = 1|\theta = i)]P(\theta = i) \\ &= \left[\frac{i}{5} \cdot \frac{(5-i)}{4} + \frac{5-i}{5} \cdot \frac{i}{4}\right] \cdot \frac{1}{6}\mathbb{1}_\Theta(i) \\ &= \frac{i(5-i)}{10} \cdot \frac{1}{6}\mathbb{1}_\Theta(i) \propto i(5-1)\mathbb{1}_\Theta(i)\end{aligned}$$

Note que isso nos concede a mesma quantidade de informação para a inferência que a amostra completa, ou seja, obtemos a mesma a posteriori utilizando esta estatística. Isto ocorre uma vez que a função $T(X)$ é uma estatística *suficiente* no sentido bayesiano. Mais adiante, discutiremos isso com mais detalhes.